www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1990

COMMUNE AUX DEUX OPTIONS
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE: 1 HEURE

A

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X] = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \text{degré}\ (P) \leqslant n \right\}$ et on considère un élément f de $\mathbb{R}_n[X]$ possédant dans $\mathbb{C}$ n racines $z_1, z_2, \ldots, z_n$ telles que $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots \leqslant |z_{n-1}| < |z_n|$ et dont le coefficient de X^n vaut 1.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que le polynôme Q défini par :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x)P(-x)$ est un polynôme pair.

2. a. En déduire : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists \hat{P} \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{P}(x^2) = P(x)P(-x)$.

b. Montrer qu'on définit une application $\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ en associant au polynôme P le polynôme $\hat{P}$, et que Φ vérifie : $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $\Phi(PQ) = \Phi(P)\,\Phi(Q)$.

c. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$.
Exprimer $\Phi(P)$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$.

3. On considère la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :
$P_0 = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = (-1)^n \Phi(P_k)$
et on note α_k le coefficient du terme de degré n-1 de P_k.

a. Déterminer les racines de P_k.

b. Exprimer α_k en fonction de k et des racines de f.

4. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} |\alpha_k|^{\frac{1}{2^k}}$.

B

La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1. On suppose ici que $f \in \mathbb{R}_3[X]$ et on note $P_n = X^3 + a_n X^2 + b_n X + c_n$.
Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n et donner un algorithme permettant de calculer a_n, b_n et c_n.

2. Soit $f = X^3 - X^2 - 1$ et soit $x = |a_5|^{\frac{1}{2^5}}$.

a. Montrer que f possède une seule racine réelle, notée a, qu'on placera par rapport à 1 et que les deux autres racines, b et c, de f sont de module inférieur à 1. (On pourra considérer le réel abc).

b. Déterminer P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5.

c. Calculer, à la précision de la calculatrice, x et f(x).

3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n|^{\frac{1}{2^n}}$. (On pourra considérer le polynôme $X^2 - X - 1$).

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail